**一．计算下列第二型曲面积分:**

**(1)其中Σ是球面*x*2+*y*2+*z*2=*R*2的下半部分的下侧;**

**解 Σ的方程为, *Dxy* : *x*2+*y*2≤*R*, 于是**

****

****

**.**

**(2), 其中*z*是柱面*x*2+*y*2=1被平面*z*=0及*z*=3所截得的第一卦限内的部分的前侧;**

**解 Σ在*xOy*面的投影为零, 故.**

**Σ可表示为, (*y*, *z*)∈*Dyz*={(*y*, *z*)|0≤*y*≤1, 0≤*z*≤3}, 故**

****

**Σ可表示为, (*z*, *x*)∈*Dzx*={(*z*, *x*)|0≤*z*≤3, 0≤*x*≤1}, 故**

**.**

**因此 .**

**解法二 Σ前侧的法向量为*n*=(2*x*, 2*y*, 0), 单位法向量为**

**,**

**由两种曲面积分之间的关系,**

****

**.**

**提示: 表示曲面的面积.**

**(3), 其中**

***f*(*x*, *y*, *z*)为连续函数, Σ是平面*x*−*y*+*z* =1在第四卦限部分的上侧;**

**解 曲面Σ可表示为*z*=1−*x*+*y* , (*x*, *y*)∈*Dxy*={(*x*, *y*)|0≤*x*≤1, 0≤*y*≤*x*−1},**

**Σ上侧的法向量为*n*=(1, −1, 1), 单位法向量为**

**,**

**由两类曲面积分之间的联系可得**

****

****

****

**.**

**解法二：曲面Σ可表示为*z*=1−*x*+*y* , (*x*, *y*)∈*Dxy*={(*x*, *y*)|0≤*x*≤1, 0≤*y*≤*x*−1},**

**利用公式计算**

****

****

****

****

**(4), 其中Σ是平面*x*=0, *y*=0, *z*=0, *x*+*y*+*z*=1所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.**

**解 Σ=Σ1+Σ2+Σ3+Σ4, 其中**

**Σ1: *x*=0, *Dyz*: 0≤*y*≤1, 0≤*z*≤1−*y*,**

**Σ2: *y*=0, *Dzx*: 0≤*z*1, 0≤*x*≤1−*z*,**

**Σ3: *z*=0, *Dxy*: 0≤*x*≤1, 0≤*y*≤1−*x*,**

**Σ4: *z*=1−*x*−*y*, *Dxy*: 0≤*x*≤1, 0≤*y*≤1−*x*,**

**于是 **

**.**

**类似可知**

**.**

**因此 .**

**解法二 Σ=Σ1+Σ2+Σ3+Σ4, 其中Σ1、Σ2、Σ3是位于坐标面上的三块;**

**Σ4: *z*=1−*x*−*y*, *Dxy*: 0≤*x*≤1, 0≤*y*≤1−*x*.**

**显然在Σ1、Σ2、Σ3上的曲面积分均为零, 于是**

****

****

****

**.**

**解法三：利用公式**

****

****

二. 把第二型曲面积分

化成第一型曲面积分:

其中Σ是抛物面*z*=8−(*x*2+*y*2)在*xOy*面上方的部分的上侧.

解 令*F*(*x*, *y*, *z*)=*z*+*x*2+*y*2−8, Σ上侧的法向量

*n*=(*Fx*, *Fy*, *Fz*)=(2*x*, 2*y*, 1),

单位法向量为

,

于是 



.

**三. 利用曲线积分求下列平面曲线所围成图形的面积:**

**(1) 星形线 ()；）**

**解**

**。**

**(2) 圆，（）；**

**解 设圆的参数方程为,从变到.那么**

****

**.**

**（3）双纽线，（）.**

**解 把双纽线的参数方程以及  代入到公式即可求得所要求的面积.**

**四 利用格林公式计算下列曲线积分:**

**(1) ，其中是圆，方向是逆时针方向；**

**解 设闭曲线所围成闭区域为，这里**

**，，，，**

**由格林公式，得**

**.**

**(2), 其中*L*为正向星形线(*a*>0);**

**解 , ,**

**,**

**由格林公式**

****

**.**

**(3) ，其中是依次连接三点的折线段，方向是顺时针方向.**

**解 令，，则，且线段，由1变化到-1，故有**

|  |  |
| --- | --- |
| **．** |  |

**其中为所围成的闭区域．**

**(4), 其中*L*是在圆周上由**

**点(0, 0)到点(1, 1)的一段弧.**

**解 *P*=*x*2−*y*, *Q*=−*x*−sin2*y*, ,**

**由格林公式有**

**,**

**其中*L*、*AB*、*BO*及*D*如图所示.**

**故 **

****